Exercice 30 - Corrigé

Deux inégalités de convexité

— La fonction $\varphi_1 : t \mapsto \ln(t)$ vérifie $\forall t > 0$, $\varphi_1'(t) = 1/t$ et $\varphi_1''(t) = -1/t^2 > 0$, elle est donc **concave** sur $]0, +\infty[$. Or, une fonction **concave** a la propriété d'être *en dessous de ses tangentes*. Ainsi en calculant la tangente au point $a = 1$,

$$\ln(t) \leq \ln(a) + \varphi_1'(a)(t-a) = 0 + 1(t-1) \quad \Longrightarrow \quad \forall t > 0,\ \ln(t) \leq t - 1.$$

— La fonction $\varphi_2 : t \mapsto \sin(t)$ vérifie $\varphi_2'(t) = \cos(t)$ et $\varphi_2''(t) = -\sin(t)$. Comme $\forall t \in [0, \pi/2]$, $-\sin(t) \leq 0$, φ_2 est **concave** sur $[0, \pi/2]$. Or, une fonction **concave** a la propriété d'être *au-dessus de ses cordes*. Ainsi en se plaçant sur l'intervalle $[0, \pi/2]$,

$$\sin(0) + t \cdot \frac{\sin(\pi/2) - \sin(0)}{\pi/2} \leq \sin(t) \quad \Longrightarrow \quad \forall t \in [0, \pi/2],\ \sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t.$$

Limite d'intégrale

Problématique

On considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale suivante

$$I_n = \int_0^n \left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n^2} \mathrm{d}x,$$

le but est de déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Limite simple

On note $\chi_{[0,n]}$ l'indicatrice du segment $[0, n]$, et on pose $f_n(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n^2} \chi_{[0,n]}$ de sorte que par définition on ait

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

et étudions la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On remarque tout d'abord que, par positivité de $\cos(x/n)$ sur $[0, n]$

$$f_n(x) = \exp\left(n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right) \chi_{[0,n]}.$$

Pour tout $x \in]0, n[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x/n = 0$, on peut donc réaliser un développement limité de $\cos x/n$ dans la limite $n \to +\infty$

$$\cos\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{x^2}{2n^2} + o(t^2),$$

ce développement limité peut ensuite être poursuivi en développant la fonction logarithme au voisinage de 1 par

$$\ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{x^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\left(\frac{x}{n}\right)^2\right).$$

Finalement,pour tout $x > 0$, on obtient la limite **simple** de $f_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$ grâce à

$$f_n(x) = \exp\left(n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right) \chi_{[0,n]} \underset{n\to\infty}{=} \exp\left(n^2\left(-\frac{x^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)\right)\right) \chi_{[0,n]} \underset{n\to\infty}{=} \exp(-x^2/2).$$

Nous avons donc montré que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait **simplement** vers la fonction $f(x) = \exp(-x^2/2)$ sur $]0, +\infty[$.

Domination de l'intégrande

Pour pouvons passer à la limite sous l'intégrale à l'Équation (1) il est nécessaire de trouver une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, positive, mesurable intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$. On rappelle que

$$f_n(x) = \exp\left(n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right) \chi_{[0,n]}. \tag{2}$$

Or, pour $x \in [0, n]$,

$$\cos\left(\frac{x}{n}\right) > 0$$

par conséquent on peut appliquer la première inégalité de convexité

$$\ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) \leq \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1,$$

puis en utilisant la seconde inégalité

$$\ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) \leq \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 = \int_0^{\frac{x}{n}} -\sin(u)\,\mathrm{d}u \leq -\int_0^{\frac{x}{n}} \frac{2u}{\pi}\,\mathrm{d}u = -\frac{x^2}{n^2\pi}.$$

Par croissance de la fonction exponentielle, en injectant cette inégalité dans l'Équation (2), on obtient

$$0 \leq f_n(x) \leq \exp\left(n^2\left(-\frac{x^2}{n^2\pi}\right)\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{\pi}\right).$$

Par conséquent, comme par définition f_n est nulle en dehors de $[0, n]$, en posant $\varphi(x) = \exp\left(-x^2/\pi\right)$, on a bien une domination sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de convergence dominée

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Limite de I_n

Calculons explicitement cette limite. On a vu que $f(x) = \exp -x^2/2$ et l'intégrale d'une fonction gaussienne est connue et vaut

$$\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-x^2/2\right)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On en conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$