FFT et estimation spectrale

Barbara Pascal

28 mai 2020

Question 2.3 : Cosinus seul

(Colonnes de gauche sur les figures)

En calculant la transformée de Fourier du cosinus on obtient deux pics de Dirac, d'amplitude $A/2$

$$\mathcal{F}[x](\nu) = \frac{A}{2}\delta(\nu - \omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \frac{A}{2}\delta(\nu + \omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}.$$

Donc pour estimer l'amplitude A, si on définit $X = \mathcal{F}[x]$, calculée en pratique par une FFT, on peut utiliser la formule suivante

$$\widehat{A} = 2 \times \max_{\nu} |X(\nu)|$$

et ce maximum étant atteint en théorie en ω_0, on propose comme estimateur de ω_0 :

$$\widehat{\omega_0} = \arg\max_{\nu} |X(\nu)|$$

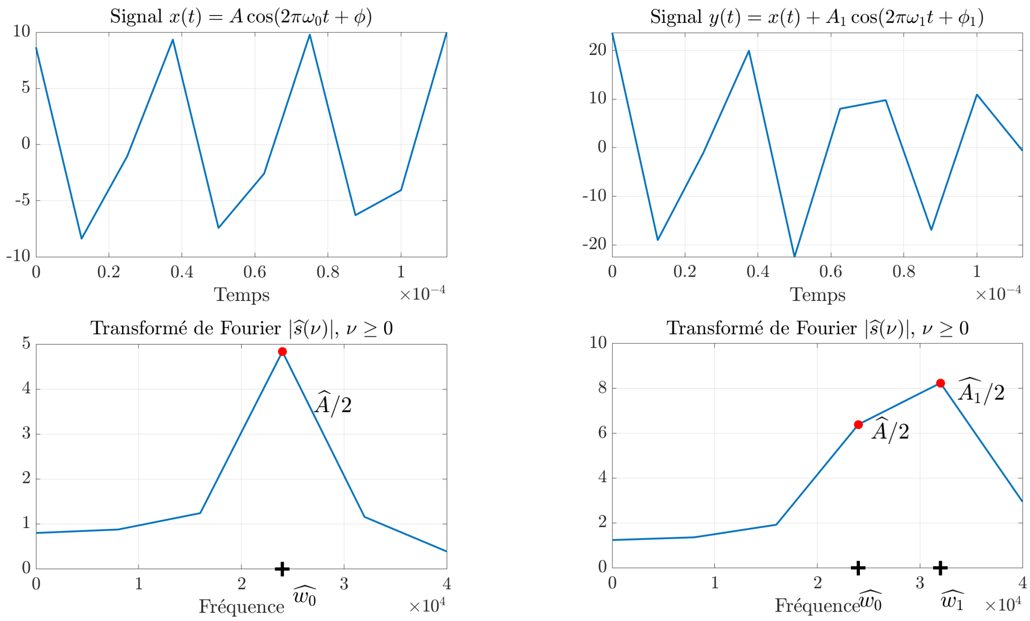
le point où ce maximum est atteint.

On remarque sur les Figures qu'utiliser seulement $N = 10$ points est suffisant pour localiser correctement ω_0.

Question 3.1 : Sommes de deux cosinus

(Colonnes de droite sur les figures)

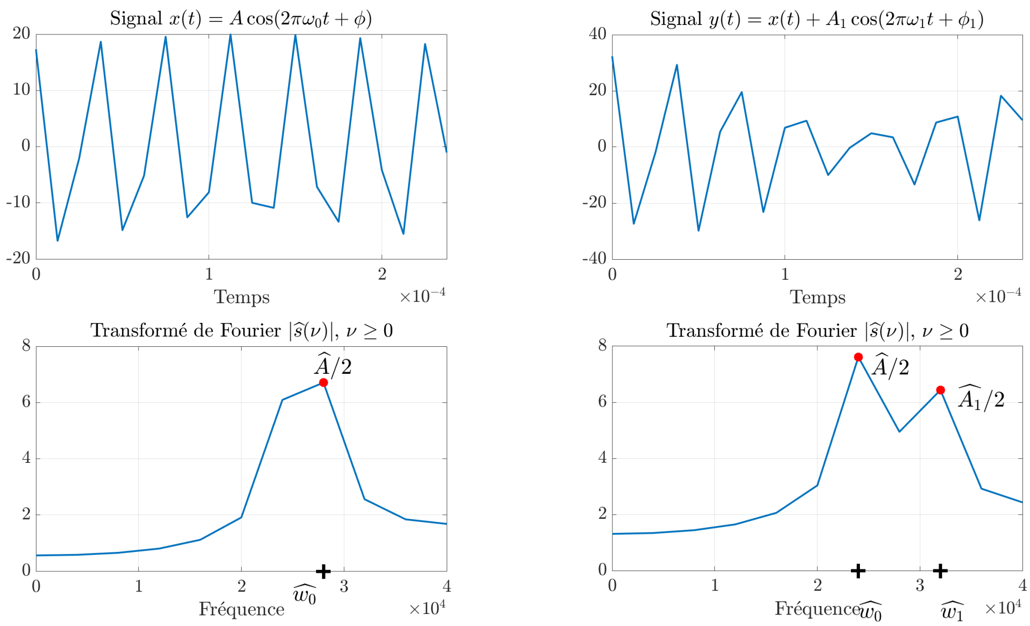
Lorsqu'on cherche à estimer deux fréquences ω_0 et ω_1 on voit sur la Figure 1 que $N = 10$ ne suffisent pas pour avoir deux pics distincts. En augmentant le nombre de points (Figures 2 et 3) les deux pics se séparent à nouveau.



(a) Signal $x(t)$.

(b) Signal $y(t)$.

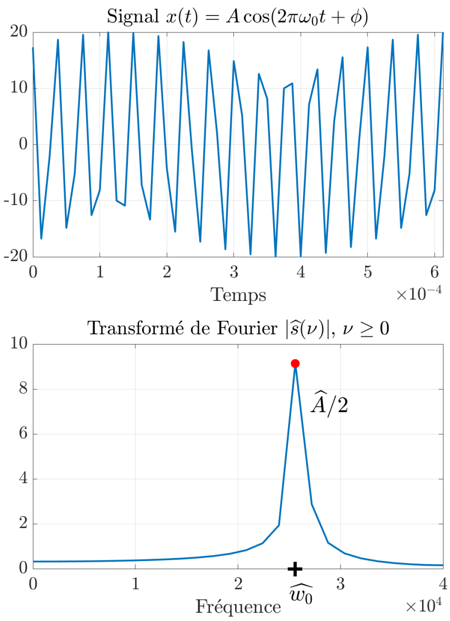
FIGURE 1 – Calcul de FFT avec $N = 10$ points. $A = 10$, $A_1 = 15$.



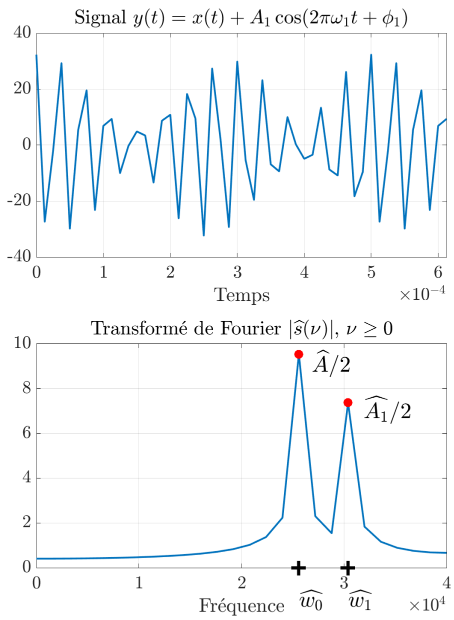
(a) Signal $x(t)$.

(b) Signal $y(t)$.

FIGURE 2 – Calcul de FFT avec $N = 20$ points. $A = 10$, $A_1 = 15$.



(a) Signal $x(t)$.



(b) Signal $y(t)$.

FIGURE 3 – Calcul de FFT avec $N = 50$ points. $A = 10$, $A_1 = 15$.

Repliement spectral

Si on multiplie le signal x par une porteuse de fréquence f_0, c'est-à-dire si on pose

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t).$$

Alors, en supposant que toutes les hypothèses mathématiques sont bien vérifiées (elles le sont, nous sommes en physique) la transformée de Fourier du produit est la *convolution* des transformées de Fourier. Or si on pose $h(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, on a

$$\mathcal{F}[h](\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - f_0) + \delta(\nu + f_0)\right).$$

Donc le calcul du produit de convolution dans le domaine de Fourier est « simple » et la transformée de Fourier de y se calcule par

$$\mathcal{F}[y](\nu_0) = \int \mathcal{F}[x](\nu_0 - \nu)\mathcal{F}[h](\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}[x](\nu_0 - f_0) + \mathcal{F}[x](\nu_0 + f_0)\right).$$

Le premier terme $\mathcal{F}[x](\nu_0 - f_0)$ est non nul uniquement lorsque

$$f_0 - B \leq \nu_0 - f_0 \leq f_0 + B \quad \Longleftrightarrow \quad 2f_0 - B \leq \nu_0 \leq 2f_0 + B,$$

tandis que le deuxième terme $\mathcal{F}[x](\nu_0 + f_0)$ est non nul uniquement lorsque

$$f_0 - B \leq \nu_0 + f_0 \leq f_0 + B \quad \Longleftrightarrow \quad -B \leq \nu_0 \leq B.$$

Par conséquent le spectre du signal y est composé d'une bande de largeur $2B$ centrée en 0 et d'une bande de largeur $2B$ centrée en $2f_0$ et on est ramené au problème du repliement spectral mais avec cette fois une fréquence maximale $2f_0 + B$.