Débruitage par variation totale

1 Étude du problème d'optimisation

On cherche à résoudre le problème de minimisation suivant

$$\widehat{x}_\lambda = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\arg\min} \ \frac{1}{2}\|x-y\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{L}x\|_1 \tag{1}$$

où on suppose disposer d'un signal observé (et bruité) y à partir duquel on souhaite retrouver le signal initial $\bar{x}$.

On sait également que le signal original $\bar{x}$ est constant par morceaux, ce qui permet de proposer une pénalisation adaptée. Voyons comment elle est construite.

i) $\mathbf{L} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ est un opérateur linéaire de dérivation discrète défini par

$$(\mathbf{L}x)^{(i)} = x^{(i+1)} - x^{(i)}.$$

On constate rapidement que l'opérateur $\mathbf{L}$ n'est pas inversible (on peut par exemple constater qu'il n'est pas injectif grâce aux dimensions des espaces de départ et d'arrivée). Comme nous sommes en dimension finie l'opérateur $\mathbf{L}$ est *borné*, notons $|||\mathbf{L}|||$ sa norme d'opérateur qui vous sera utile pour la question 3) du TP1. Calculons cette norme numériquement. La matrice de $\mathbf{L}$ s'écrit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Le code (Matlab) ci-dessous permet de construire la matrice en Matlab et de calculer sa norme d'opérateur grâce à la fonction `norm`.

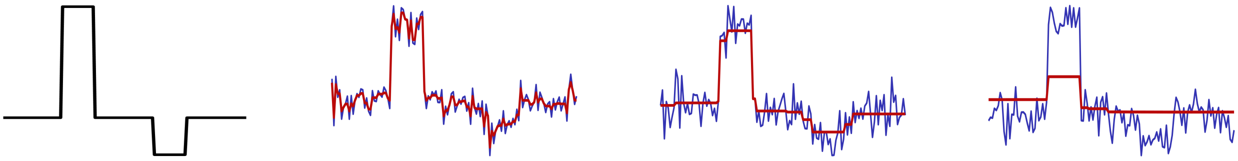
ATTENTION : *numériquement* calculer $\mathbf{L}x$ (ou $\mathbf{L}^*y$) en faisant un produit matriciel n'est pas du tout optimal ! Dans ce paragraphe écrire la matrice permet de se représenter les choses (notamment pour le passage à l'adjoint) et de calculer la norme. Mais de manière générale lorsque la matrice de votre opérateur contient autant de zéros *il ne faut pas* utiliser le produit matriciel dans un algorithme ! À vous d'y réfléchir d'ici à la prochaine séance de TP.

NB : Vous pouvez rencontrer dans certains articles/codes des opérateurs de dérivée $\mathbf{L} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, il s'agit souvent simplement de rajouter une composante nulle à la fin du vecteur $\mathbf{L}x$ pour garder la même taille de vecteur. Dans le code ci-dessous il s'agit de la version en gris, je vous laisse constater que même pour de courts signaux de 50 points cela ne change pas la norme de $\mathbf{L}$.

```
> N = 50;
> L_temp = -eye(N) + diag(ones(1,N-1),1);
> L = L_temp(1:N-1,:);
> L_square = L_temp; L_square(end,:) = 0;
> normL = norm(L);
```

ii) La norme $\|\cdot\|_1$ favorise la parcimonie (i.e. avoir peu de coefficients non nuls). Ainsi, pour prendre en compte le fait qu'on cherche un signal constant par morceaux, on utilise le fait qu'un tel signal a sa dérivée nulle presque partout. On construit donc un terme qui favorise la parcimonie de la dérivée de $\widehat{x}_\lambda$. En pratique, plus $\|\mathbf{L}x\|_1$ est faible, moins le signal x contient de paliers, jusqu'à être constant quand ce terme est nul.

iii) La paramètre λ permet de faire un compromis entre la fidélité au signal observé et la contrainte « constant par morceaux » . La figure ci-dessous illustre les débruitages (en rouge) d'un signal obtenus pour différentes valeurs de λ (en bleu apparaît le signal bruité) à comparer au vrai signal (en noir à gauche).



Signal $\bar{x}$ — $\widehat{x}_\lambda$, λ trop faible — $\widehat{x}_\lambda$, λ optimal — $\widehat{x}_\lambda$, λ trop grand.

2 Problème dual

Le problème (1) peut s'écrire sous la forme générale

$$\widehat{x} = \arg\min_{x \in \mathcal{H}} f(x) + g(\mathbf{L}x) \tag{2}$$

avec $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$ (nous sommes donc en dimension finie, convergence faible et convergence forte sont équivalentes, tous les théorèmes de convergence du cours s'appliquent),

$$f(x) := \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2, \quad g(z) := \lambda\|z\|_1.$$

2.1 Pourquoi passer au dual ?

Dans le problème ci-dessus la fonction f est différentiable, imaginons utiliser l'algorithme forward-backward (décrit à la diapositive 15, Chapitre 5 avec des **notations inversées** pour f et g). Tel que présenté dans le cours, cet algorithme minimise un critère de la forme $f + h$, avec $h := g \circ \mathbf{L}$ dans notre cas et s'écrit :

for $n \in \mathbb{N}^*$ **do**
  $y_n = x_n - \gamma \nabla f(x_n)$
  $x_{n+1} = x_n + \lambda_n \big(\mathrm{prox}_{\gamma h}(y_n) - x_n\big)$.
end

Le problème c'est que de manière générale $\mathrm{prox}_h = \mathrm{prox}_{g \circ \mathbf{L}}$ est très difficile (voire impossible) à calculer. *A contrario*, lorsqu'une fonction ϕ est différentiable, un calcul rapide donne :

$$\nabla[\phi \circ \mathbf{L}](x) = \mathbf{L}^* \nabla\phi(\mathbf{L}x).$$

Le passage au problème dual va permettre de voir apparaître la composée d'une fonction différentiable et d'un opérateur linéaire, ce qui sera beaucoup plus facile à manipuler que la composée d'une fonction « proximable » et d'un opérateur linéaire.

2.2 Fonctions conjuguées

D'après le Chapitre 7 du cours le problème primal (2) est associé au problème dual suivant :

$$\widehat{u} = \arg\min_{u \in \mathcal{G}} f^*(-\mathbf{L}^* u) + g^*(u), \tag{3}$$

où l'espace de Hilbert $\mathcal{G}$ est par définition l'espace d'arrivée de l'opérateur $\mathbf{L} : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$.

i) *Calcul de la fonction convexe conjuguée f^* :*

$$f^*(t) := \sup_{x \in \mathcal{H}} \langle x | t \rangle - f(x),$$

la fonction f étant différentiable, ce sup est atteint en $\bar{x}$ caractérisé par $t - \nabla f(\bar{x}) = 0$, or dans notre exemple f est simplement quadratique donc

$$\begin{aligned}\nabla f(x) = x - y \;\Rightarrow\; t - (\bar{x} - y) = 0 \;\Rightarrow\; f^*(t) &= \langle t + y | t \rangle - \frac{1}{2}\|t\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|t\|_2^2 + \langle y | t \rangle \\ &= \frac{1}{2}\|t + y\|_2^2 - \frac{1}{2}\|y\|_2^2,\end{aligned}$$

par conséquent vous constatez que $f^*(-\mathbf{L}^*u) = \frac{1}{2}\|-\mathbf{L}^*u+y\|_2^2 + \text{Cste}$, avec Cste $:= -\frac{1}{2}\|y\|_2^2$.
Attention : Cette constante ne change rien à la solution du problème $\widehat{x}_\lambda$ (i.e. au point où est atteint le minimum), donc généralement on peut l'omettre dans les itérations de l'algorithme. Néanmoins lorsque vous souhaitez calculer le *gap de dualité* (qui lui dépend des fonctionnelles) il ne faut pas l'oublier !

ii) *Fonction convexe conjuguée g^* :* dans notre exemple $g = \lambda\|\cdot\|_1$ est une norme (avec $p = 1$ donc $q = \infty$) donc (cf. cours)

$$g^* = \iota_{\|\cdot\|_\infty \leq \lambda}$$

ce qui amène à l'expression du problème dual en bas de première page du TP1. Or il est facile de montrer (et nous l'avons vu rapidement en cours) que l'opérateur proximal d'une indicatrice correspond à la projection sur cette ensemble, donc

$$\text{prox}_{g^*} = P_{\|\cdot\|_\infty \leq \lambda}.$$

Or la difficulté c'est de calculer cette projection ... ce qui va être possible grâce à la décomposition de Moreau, reliant prox_g et prox_g^* (rappelée dans le sujet du TP1 (cours Chapitre 6, diapositive 5/13).
En effet l'opérateur proximal de la norme $\|\cdot\|_1$ est connu (il s'appelle le *seuillage doux*, ou *soft-thresholding* en anglais) et s'écrit

$$p = \text{prox}_{\lambda\|\cdot\|_1}(x) \Leftrightarrow p^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } |x^{(i)}| \leq \lambda \\ x^{(i)} - \lambda \frac{x^{(i)}}{|x^{(i)}|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.3 Lien entre les solutions primale et duale

Pour un problème de formes générales

$$\text{Primale : } \widehat{x} = \underset{x\in\mathcal{H}}{\arg\min}\ f(x) + g(\mathbf{L}x)$$
$$\text{Duale : } \widehat{u} = \underset{u\in\mathcal{G}}{\arg\min}\ f^*(-\mathbf{L}^*u) + g^*(u),$$

d'après le Chapitre 7 les solutions primale $\widehat{x}$ et duale $\widehat{u}$ sont liées par deux relations :

$$-\mathbf{L}^*\widehat{u} = \nabla f(\widehat{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{L}\widehat{x} \in \partial g^*(\widehat{u}).$$

Dans notre exemple la fonction f étant différentiable on privilégie la première relation et on obtient

$$-\mathbf{L}^*\widehat{u} = \widehat{x} - y \Rightarrow \widehat{x} = y - \mathbf{L}^*\widehat{u}.$$

NB : pour retrouver les expressions exactes du TP1 il faut changer u en $-u$ dans la définition du problème dual, en remarquant trivialement que $\|-u\|_\infty = \|u\|_\infty$.

3 Extension au débruitage d'image

Il est possible d'étendre le débruitage par variation totale du TP1 au cas des images. Pour cela plusieurs modifications doivent être apportées :

i) L'attache aux données change très peu : pour une image observée $y \in \mathbb{R}^{N\times N}$ on considère

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x-y\|_{\text{Fro}}^2, \quad \text{où } \|a\|_{\text{Fro}}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \text{ est la norme de Fronbenius d'une matrice } a = (a_{i,j}).$$

ii) L'opérateur $\mathbf{L}$ doit désormais prendre en compte l'existence de deux directions. Ainsi pour une image carrée (pour simplifier) représentée par une matrice de taille $N \times N$, notée $(x_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$,

$$\mathbf{L} : \mathbb{R}^{N\times N} \to (\mathbb{R}^{N-1\times N-1})^2$$

est composé d'une dérivée horizontale $\mathbf{H} : \mathbb{R}^{N\times N} \to \mathbb{R}^{N-1\times N-1}$ et d'une dérivée verticale $\mathbf{V} : \mathbb{R}^{N\times N} \to \mathbb{R}^{N-1\times N-1}$:

$$(\mathbf{L}x)_{i,j} := [(\mathbf{H}x)_{i,j}, (\mathbf{V}x)_{i,j}],$$
$$\text{avec } (\forall i \neq N), (\forall j \neq N), \begin{cases} (\mathbf{H}x)_{i,j} := x_{i,j+1} - x_{i,j}, \\ (\mathbf{V}x)_{i,j} := x_{i+1,j} - x_{i,j} \end{cases}$$

iii) Il existe ensuite deux façons de généraliser la variation totale 1D (qui s'écrit dans le cas 1D $\|\mathbf{L}z\|_1$, cf. Pb. 1) :

— *La variation totale isotrope :*

$$g(\mathbf{L}x) := \sum_{1\leq i,j\leq N-1} \sqrt{(\mathbf{H}x)_{i,j}^2 + (\mathbf{V}x)_{i,j}^2}, \quad \text{c'est à dire } g := \begin{cases} (\mathbb{R}^{N-1\times N-1})^2 \to \mathbb{R} \\ (u_\mathrm{h}, u_\mathrm{v}) \mapsto \sum_{1\leq i,j\leq N-1} \sqrt{(u_\mathrm{h})_{i,j}^2 + (u_\mathrm{v})_{i,j}^2} \end{cases}$$

la fonction g définie ci-dessus est généralement notée $\|\cdot\|_{2,1}$ et appelée norme mixte.

— *La variation totale anisotrope :*

$$g(\mathbf{L}x) := \sum_{1\leq i,j\leq N-1} |(\mathbf{H}x)_{i,j}| + |(\mathbf{V}x)_{i,j}|, \quad \text{c'est à dire } g := \begin{cases} (\mathbb{R}^{N-1\times N-1})^2 \to \mathbb{R} \\ (u_\mathrm{h}, u_\mathrm{v}) \mapsto \sum_{1\leq i,j\leq N-1} |(u_\mathrm{h})_{i,j}| + |(u_\mathrm{v})_{i,j}| \end{cases}$$

dans ce deuxième cas la fonction g est simplement la norme $\|\cdot\|_1$ de la concaténation de $\mathbf{H}x$ et $\mathbf{V}x$.