# Modèle bayésien hiérarchique pour l'estimation du coefficient de reproduction de la COVID-19 à partir de comptes hebdomadaires

***GRETSI'25*** : *XXX$^{\text{ème}}$ Colloque français de Traitement du Signal et des Images*

Strasbourg, 25 au 29 août 2025

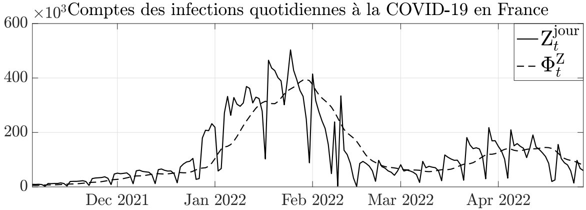
**Barbara Pascal**† et Patrice Abry ‡

† Nantes Université, École Centrale Nantes, CNRS, LS2N, UMR 6004, F-44000 Nantes, France

‡ CNRS, Ens de Lyon, Laboratoire de Physique, Lyon, France

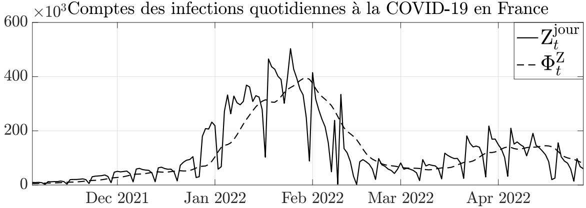
Avec le soutien du financement ANR **OptiMoCSI** (ANR-23-CE48-0009)

# Surveillance d'épidémie à partir des comptes d'infections




Suivi de la COVID-19 par l'Université Johns Hopkins (coronavirus.jhu.edu)

# Surveillance d'épidémie à partir des comptes d'infections



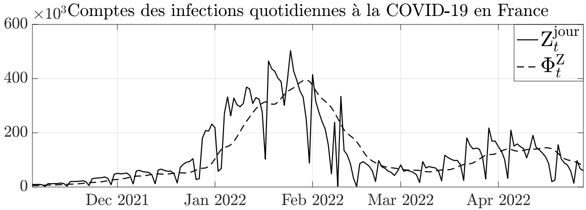

Suivi de la COVID-19 par l'Université Johns Hopkins (coronavirus.jhu.edu)

**Nombre de reproduction effectif :** indicateur épidémiologique $R_t$ dépendant du temps

*nombre de cas secondaires générés par un individu contagieux*

(Wallinga et coll. 2004, *Am. J. of Epidemiol.* ; Cori et coll. 2013, *Am. J. Epidemiol.*)

# Surveillance d'épidémie à partir des comptes d'infections




Suivi de la COVID-19 par l'Université Johns Hopkins (coronavirus.jhu.edu)

**Nombre de reproduction effectif :** indicateur épidémiologique $R_t$ dépendant du temps

*nombre de cas secondaires générés par un individu contagieux*

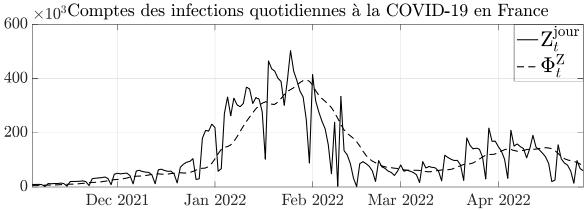
(Wallinga et coll. 2004, *Am. J. of Epidemiol.* ; Cori et coll. 2013, *Am. J. Epidemiol.*)

**Interprétation directe**

- $R_t < 1$ décroissance exponentielle du nombre de cas
- $R_t = 1$ épidémie stable
- $R_t > 1$ croissance exponentielle du nombre de cas : **vague épidémique**

**Objectif :** estimation de $R_t$ **précise**, **robuste** avec **niveau de confiance** fiable

# Surveillance d'épidémie à partir des comptes d'infections




Suivi de la COVID-19 par l'Université Johns Hopkins (coronavirus.jhu.edu)

**Nombre de reproduction effectif :** indicateur épidémiologique $R_t$ dépendant du temps

*nombre de cas secondaires générés par un individu contagieux*

(Wallinga et coll. 2004, *Am. J. of Epidemiol.* ; Cori et coll. 2013, *Am. J. Epidemiol.*)

**Enjeux et difficultés de l'estimation** durant une pandémie :

- forte **variabilité intrinsèque** des comptes due à la propagation virale aléatoire
- **erreurs et délais** dans le report des cas, par exemple lors des jours chômés
- passage d'un report quotidien à un décompte à l'échelle de la **semaine**

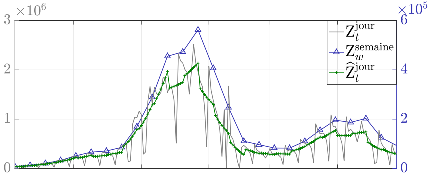
**Estimation en deux étapes :**

- comptes quotidiens par **interpolation**

  $\widehat{Z}_t^{\text{jour}}$ à partir des $Z_w^{\text{semaine}}$

  guidée par modèle de propagation

  (Nash et coll. 2023, *PLoS Comput. Biol.*)



**Estimation en deux étapes :**

- comptes quotidiens par **interpolation**

  $$\widehat{Z}_t^{\text{jour}} \text{ à partir des } Z_w^{\text{semaine}}$$

  guidée par modèle de propagation

  (Nash et coll. 2023, *PLoS Comput. Biol.*)

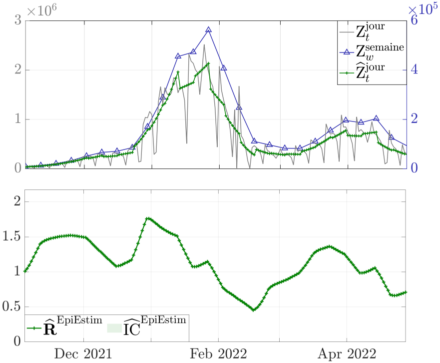
- estimateur **bayésien** régularisé

  $\widehat{\mathbf{R}}^{\text{EpiEstim}}$ : moyenne à posteriori

  $\widehat{\mathbf{IC}}^{\text{EpiEstim}}$ : intervalles de crédibilité

  quantiles à $\varepsilon = 2{,}5\%$ et $1 - \varepsilon = 97{,}5\%$

  (Cori et coll. 2013, *Am. J. Epidemiol.* ; Thompson et coll. 2019, *Epidemics*)



# État-de-l'art en épidémiologie : EpiEstim

**Estimation en deux étapes :**

- comptes quotidiens par **interpolation**

  $$\widehat{\mathsf{Z}}_t^{\mathsf{jour}} \text{ à partir des } \mathsf{Z}_w^{\mathsf{semaine}}$$

  guidée par modèle de propagation

  (Nash et coll. 2023, *PLoS Comput. Biol.*)

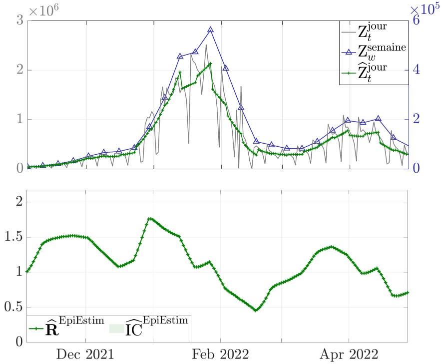
- estimateur **bayésien** régularisé

  $\widehat{\mathbf{R}}^{\mathsf{EpiEstim}}$ : moyenne à posteriori

  $\widehat{\mathbf{IC}}^{\mathsf{EpiEstim}}$ : intervalles de crédibilité

  quantiles à $\varepsilon = 2{,}5\%$ et $1 - \varepsilon = 97{,}5\%$

  (Cori et coll. 2013, *Am. J. Epidemiol.*; Thompson et coll. 2019, *Epidemics*)




**Limitations :**

- fluctuations temporelles **rapides** : incompatible avec évolution régulière
- intervalles de crédibilité très **étroits** : ne reflète pas l'incertitude réelle
- biais : estimation quotidienne à partir de données **hebdomadaires**

# Modèle de Poisson remis à l'échelle

**Distribution de Poisson**

$$\mathsf{Z}_t \mid \mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{t-1} \sim \mathcal{P}\left(\Phi_t^{\mathsf{Z}} \mathsf{R}_t\right), \; \Phi_t^{\mathsf{Z}} = \sum_{s=1}^{\tau_\Phi} \phi(s) \mathsf{Z}_{t-s}$$

(Cori et coll. 2013, *Am. J. Epidemiol.*; Liu et coll. 2018, *PNAS*)

$\phi$ *: distribution Gamma tronquée à* $\tau_\Phi = 25$ *jours, moyenne* 6,6 *jours, écart-type* 3,5 *jours*

(Cereda et coll. 2020, *arXiv :2003.09320*; Riccardo et coll. 2020, *Euro Surveillance*)

# Modèle de Poisson remis à l'échelle

**Distribution de Poisson**

$$\mathsf{Z}_t \mid \mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{t-1} \sim \mathcal{P}\left(\Phi_t^{\mathbf{Z}} \mathsf{R}_t\right), \ \Phi_t^{\mathbf{Z}} = \sum_{s=1}^{\tau_\Phi} \phi(s) \mathsf{Z}_{t-s}$$

(Cori et coll. 2013, *Am. J. Epidemiol.*; Liu et coll. 2018, *PNAS*)

**Estimateur du maximum de vraisemblance :** $\widehat{\mathsf{R}}_t^{\mathrm{ML}} = \mathsf{Z}_t / \Phi_t^{\mathbf{Z}}$

$\phi$ *: distribution Gamma tronquée à* $\tau_\Phi = 25$ *jours, moyenne* 6,6 *jours, écart-type* 3,5 *jours*

(Cereda et coll. 2020, *arXiv :2003.09320*; Riccardo et coll. 2020, *Euro Surveillance*)

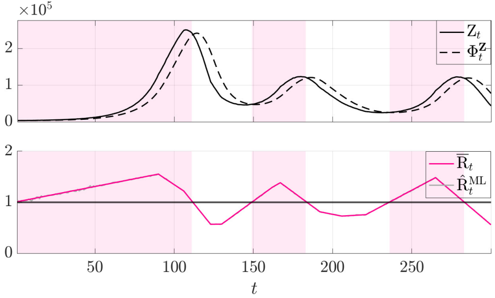
**Distribution de Poisson**

$$\mathsf{Z}_t \mid \mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{t-1} \sim \mathcal{P}\left(\Phi_t^{\mathbf{Z}} \mathsf{R}_t\right), \quad \Phi_t^{\mathbf{Z}} = \sum_{s=1}^{\tau_\Phi} \phi(s) \mathsf{Z}_{t-s}$$

(Cori et coll. 2013, *Am. J. Epidemiol.*; Liu et coll. 2018, *PNAS*)

**Estimateur du maximum de vraisemblance :** $\widehat{\mathsf{R}}_t^{\mathrm{ML}} = \mathsf{Z}_t / \Phi_t^{\mathbf{Z}}$

**Données synthétiques :** (Cori et coll. 2013, *Am. J. Epidemiol.*; Liu et coll. 2018, *PNAS*)




*$\phi$ : distribution Gamma tronquée à $\tau_\Phi = 25$ jours, moyenne* 6,6 *jours, écart-type* 3,5 *jours*

(Cereda et coll. 2020, *arXiv :2003.09320*; Riccardo et coll. 2020, *Euro Surveillance*)

# Modèle de Poisson remis à l'échelle

**Distribution de Poisson remise à l'échelle** $\gamma > 1$ : variance mieux ajustée

$$\frac{\mathsf{Z}_t}{\gamma} \mid \mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{t-1} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\Phi_t^{\mathsf{Z}} \mathsf{R}_t}{\gamma}\right), \; \Phi_t^{\mathsf{Z}} = \sum_{s=1}^{\tau_\Phi} \phi(s) \mathsf{Z}_{t-s}$$

(Pascal et coll. 2024, *arXiv :2409.14937*)

**Estimateur du maximum de vraisemblance :** $\widehat{\mathsf{R}}_t^{\mathrm{ML}} = \mathsf{Z}_t / \Phi_t^{\mathsf{Z}}$

$\phi$ *: distribution Gamma tronquée à* $\tau_\Phi = 25$ *jours, moyenne* 6,6 *jours, écart-type* 3,5 *jours*

(Cereda et coll. 2020, *arXiv :2003.09320*; Riccardo et coll. 2020, *Euro Surveillance*)

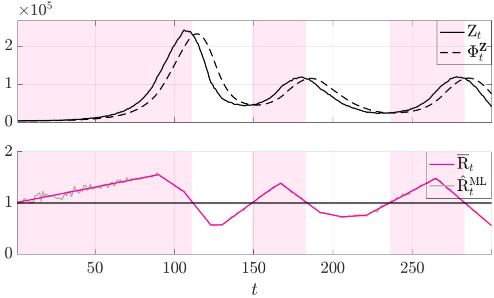
**Distribution de Poisson remise à l'échelle** $\gamma > 1$ : variance mieux ajustée

$$\frac{\mathsf{Z}_t}{\gamma} \mid \mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{t-1} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\Phi_t^{\mathbf{Z}} \mathsf{R}_t}{\gamma}\right), \quad \Phi_t^{\mathbf{Z}} = \sum_{s=1}^{\tau_\Phi} \phi(s) \mathsf{Z}_{t-s}$$

(Pascal et coll. 2024, *arXiv :2409.14937*)

**Estimateur du maximum de vraisemblance :** $\widehat{\mathsf{R}}_t^{\mathrm{ML}} = \mathsf{Z}_t / \Phi_t^{\mathbf{Z}}$

**Données synthétiques :** $\gamma = 10$ (Pascal et coll. 2024, *arXiv :2409.14937*)




*$\phi$ : distribution Gamma tronquée à $\tau_\Phi = 25$ jours, moyenne 6,6 jours, écart-type 3,5 jours*

(Cereda et coll. 2020, *arXiv :2003.09320* ; Riccardo et coll. 2020, *Euro Surveillance*)

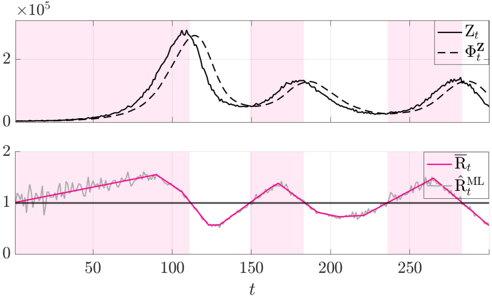
**Distribution de Poisson remise à l'échelle** $\gamma > 1$ : variance mieux ajustée

$$\frac{Z_t}{\gamma} \mid Z_1, \ldots, Z_{t-1} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\Phi_t^{\mathbf{Z}} R_t}{\gamma}\right), \quad \Phi_t^{\mathbf{Z}} = \sum_{s=1}^{\tau_\Phi} \phi(s) Z_{t-s}$$

(Pascal et coll. 2024, *arXiv :2409.14937*)

**Estimateur du maximum de vraisemblance :** $\widehat{R}_t^{\mathrm{ML}} = Z_t / \Phi_t^{\mathbf{Z}}$

**Données synthétiques :** $\gamma = 100$ (Pascal et coll. 2024, *arXiv :2409.14937*)




*$\phi$ : distribution Gamma tronquée à* $\tau_\Phi = 25$ *jours, moyenne* 6,6 *jours, écart-type* 3,5 *jours*

(Cereda et coll. 2020, *arXiv :2003.09320* ; Riccardo et coll. 2020, *Euro Surveillance*)

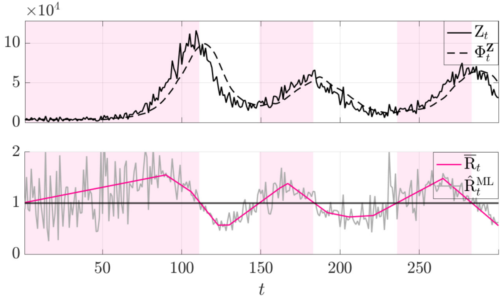
**Distribution de Poisson remise à l'échelle** $\gamma > 1$ : variance mieux ajustée

$$\frac{\mathsf{Z}_t}{\gamma} \mid \mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{t-1} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\Phi_t^{\mathbf{Z}} \mathsf{R}_t}{\gamma}\right), \quad \Phi_t^{\mathbf{Z}} = \sum_{s=1}^{\tau_\Phi} \phi(s) \mathsf{Z}_{t-s}$$

(Pascal et coll. 2024, *arXiv :2409.14937*)

**Estimateur du maximum de vraisemblance :** $\widehat{\mathsf{R}}_t^{\mathrm{ML}} = \mathsf{Z}_t / \Phi_t^{\mathbf{Z}}$

**Données synthétiques :** $\gamma = 1000$ (Pascal et coll. 2024, *arXiv :2409.14937*)




$\phi$ *: distribution Gamma tronquée à* $\tau_\Phi = 25$ *jours, moyenne* 6,6 *jours, écart-type* 3,5 *jours*

(Cereda et coll. 2020, *arXiv :2003.09320* ; Riccardo et coll. 2020, *Euro Surveillance*)

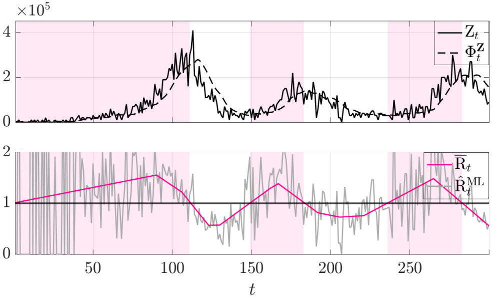
**Distribution de Poisson remise à l'échelle** $\gamma > 1$ : variance mieux ajustée

$$\frac{Z_t}{\gamma} \mid Z_1, \ldots, Z_{t-1} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\Phi_t^{\mathbf{Z}} R_t}{\gamma}\right), \quad \Phi_t^{\mathbf{Z}} = \sum_{s=1}^{\tau_\Phi} \phi(s) Z_{t-s}$$

(Pascal et coll. 2024, *arXiv :2409.14937*)

**Estimateur du maximum de vraisemblance :** $\widehat{R}_t^{\mathrm{ML}} = Z_t / \Phi_t^{\mathbf{Z}}$

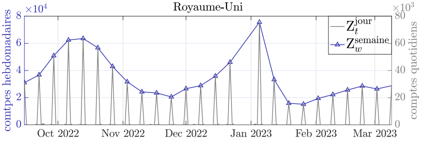
**Données synthétiques :** $\gamma = 10^4$ (Pascal et coll. 2024, *arXiv :2409.14937*)

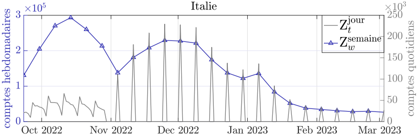



*$\phi$ : distribution Gamma tronquée à $\tau_\Phi = 25$ jours, moyenne 6,6 jours, écart-type 3,5 jours*

(Cereda et coll. 2020, *arXiv :2003.09320* ; Riccardo et coll. 2020, *Euro Surveillance*)

- En fin de pandémie : reports **hebdomadaires** au lieu de quotidiens

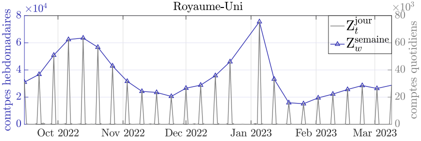


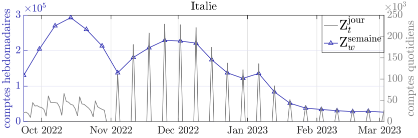




Suivi de la COVID-19 par l'Université Johns Hopkins (coronavirus.jhu.edu)

# Modèle épidémiologique pour des comptes hebdomadaires

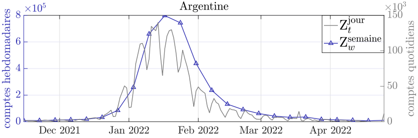
- En fin de pandémie : reports **hebdomadaires** au lieu de quotidiens

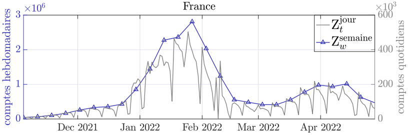



Suivi de la COVID-19 par l'Université Johns Hopkins (coronavirus.jhu.edu)

- Erreurs administratives lissées par **agrégation** des comptes sur une semaine



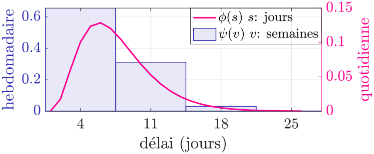

(Ferguson et coll. 2016, *Science* ; Charniga et coll. 2021, *PLoS Comput. Biol.*)

Cas reportés à la **semaine** $w$ : $\gamma > 1$

$$\frac{\mathsf{Z}_w}{\gamma} \mid \mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{w-1} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\Psi_w^{\mathsf{Z}} \mathsf{R}_w}{\gamma}\right),$$

$$\Psi_w^{\mathsf{Z}} = \sum_{v=1}^{\tau_\Psi} \psi(v) \mathsf{Z}_{w-v}$$

$\psi$ : fonction d'intervalle de série **hebdomadaire**




$\phi, \psi$ : distributions Gamma moyenne 6,6 jours, écart-type 3,5 jours

$\tau_\Psi = 4$ semaines

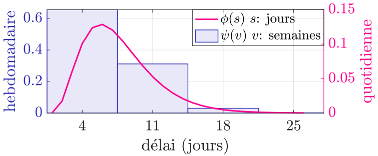
# Modèle de Poisson remis à l'échelle pour des comptes hebdomadaires

Cas reportés à la **semaine** $w$ : $\gamma > 1$

$$\frac{\mathsf{Z}_w}{\gamma} \mid \mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{w-1} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\Psi^{\mathsf{Z}}_w \mathsf{R}_w}{\gamma}\right),$$

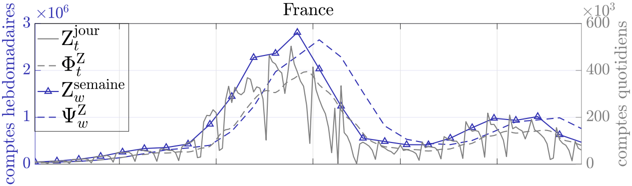
$$\Psi^{\mathsf{Z}}_w = \sum_{v=1}^{\tau_\Psi} \psi(v) \mathsf{Z}_{w-v}$$

$\psi$ : fonction d'intervalle de série **hebdomadaire**




$\phi, \psi$ : distributions Gamma moyenne 6,6 jours, écart-type 3,5 jours

$\tau_\Psi = 4$ semaines



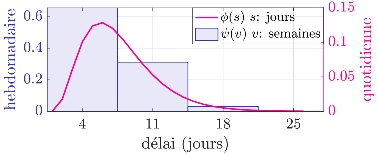
# Modèle de Poisson remis à l'échelle pour des comptes hebdomadaires

Cas reportés à la **semaine** $w$ : $\gamma > 1$

$$\frac{\mathsf{Z}_w}{\gamma} \mid \mathsf{Z}_1, \ldots, \mathsf{Z}_{w-1} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\Psi^{\mathsf{Z}}_w \mathsf{R}_w}{\gamma}\right),$$

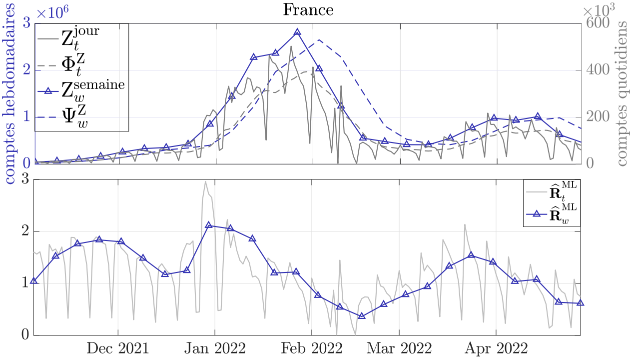
$$\Psi^{\mathsf{Z}}_w = \sum_{v=1}^{\tau_\Psi} \psi(v)\mathsf{Z}_{w-v}$$

$\psi$ : fonction d'intervalle de série **hebdomadaire**




$\phi, \psi$ : distributions Gamma moyenne 6,6 jours, écart-type 3,5 jours

$\tau_\Psi = 4$ semaines



# Distributions à priori

Loi à priori du **nombre de reproduction hebdomadaire** :

$$\pi(\mathsf{R}_w | \mathsf{R}_{w-1},\, \mathsf{R}_{w-2},\, \lambda_\mathsf{R}) \propto \lambda_\mathsf{R}\, \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_\mathsf{R}}{4} |\mathsf{R}_w - 2\mathsf{R}_{w-1} + \mathsf{R}_{w-2}|}$$

$\Longrightarrow$ loi de Laplace de paramètre $\lambda_\mathsf{R}$ sur la dérivée seconde de $\mathsf{R}_w$

(Abry et coll. 2022, *GRETSI'22* ; Fort et coll. 2023, *IEEE Trans. Signal Process.*)

# Distributions à priori

Loi à priori du **nombre de reproduction hebdomadaire** :

$$\pi(\mathsf{R}_w | \mathsf{R}_{w-1},\, \mathsf{R}_{w-2},\, \lambda_\mathsf{R}) \propto \lambda_\mathsf{R}\, \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_\mathsf{R}}{4}|\mathsf{R}_w - 2\mathsf{R}_{w-1} + \mathsf{R}_{w-2}|}$$

$\Longrightarrow$ loi de Laplace de paramètre $\lambda_\mathsf{R}$ sur la dérivée seconde de $\mathsf{R}_w$

(Abry et coll. 2022, *GRETSI'22* ; Fort et coll. 2023, *IEEE Trans. Signal Process.*)

Loi a priori du **paramètre de la loi de Laplace :** Gamma, conjuguée à Laplace

$$\pi(\lambda_\mathsf{R}) \propto \lambda_\mathsf{R}^{\alpha_\mathsf{R}-1} \mathrm{e}^{-\beta_\mathsf{R}\lambda_\mathsf{R}}$$

d'espérance $\mu_\mathsf{R} = \alpha_\mathsf{R}/\beta_\mathsf{R}$ et de variance $\sigma_\mathsf{R}^2 = \alpha_\mathsf{R}/\beta_\mathsf{R}^2$ (Abry et coll. 2025, *ICASSP*)

Loi à priori du **nombre de reproduction hebdomadaire** :

$$\pi(\mathsf{R}_w|\mathsf{R}_{w-1},\ \mathsf{R}_{w-2},\ \lambda_\mathsf{R}) \propto \lambda_\mathsf{R}\, \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_\mathsf{R}}{4}|\mathsf{R}_w - 2\mathsf{R}_{w-1} + \mathsf{R}_{w-2}|}$$

$\Longrightarrow$ loi de Laplace de paramètre $\lambda_\mathsf{R}$ sur la dérivée seconde de $\mathsf{R}_w$

(Abry et coll. 2022, *GRETSI'22* ; Fort et coll. 2023, *IEEE Trans. Signal Process.*)

Loi a priori du **paramètre de la loi de Laplace :** Gamma, conjuguée à Laplace

$$\pi(\lambda_\mathsf{R}) \propto \lambda_\mathsf{R}^{\alpha_\mathsf{R}-1} \mathrm{e}^{-\beta_\mathsf{R}\lambda_\mathsf{R}}$$

d'espérance $\mu_\mathsf{R} = \alpha_\mathsf{R}/\beta_\mathsf{R}$ et de variance $\sigma_\mathsf{R}^2 = \alpha_\mathsf{R}/\beta_\mathsf{R}^2$ (Abry et coll. 2025, *ICASSP*)

$\Longrightarrow$ $\alpha_\mathsf{R} > 0$, $\beta_\mathsf{R} > 0$ choisis pour que l'hyperprior soit **quasi-non informatif** *via*

$$\mu_\mathsf{R} = 3{,}5 \times \mathrm{std}(\mathbf{Z})/\gamma \quad \text{et} \quad \sigma_\mathsf{R} = 20 \times \mu_\mathsf{R}$$

centré en valeur historique de $\lambda_\mathsf{R}$ (Abry et coll. 2020, *PLOS One*) et très **plat**

**Distribution jointe à posteriori :** par la règle de Bayes $\ln \pi(\mathbf{R}, \lambda_{\mathrm{R}} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0) =$

$$-\sum_{w=1}^{W} \frac{\left(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}} - \mathrm{Z}_w \ln(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}})\right)}{\gamma} - \lambda_{\mathrm{R}} \left(\|\mathrm{D}\mathbf{R} + \delta\|_1 + \beta_{\mathrm{R}}\right) + (W + \alpha_{\mathrm{R}} - 1) \ln \lambda_{\mathrm{R}}$$

où
- $\mathbf{R} = (\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_W)$ : nombres de reproduction hebdomadaires
- $\lambda_{\mathrm{R}}$ : hyperparamètre de la loi à priori sur $\mathbf{R}$
- $\mathbf{Z} = (\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_W)$ : comptes d'infections hebdomadaires
- $\mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0$ : nombres de reproduction initiaux
- $\gamma$ : paramètre d'échelle
- $\alpha_{\mathrm{R}}, \beta_{\mathrm{R}}$ : hyperparamètres

$\forall w \in \{2, \ldots, W\},\ (\mathrm{D}\mathbf{R})_w := (\mathrm{R}_w - 2\mathrm{R}_{w-1} + \mathrm{R}_{w-2})/4,$ au bord $(\mathrm{D}\mathbf{R})_1 = \mathrm{R}_1/4,\ (\mathrm{D}\mathbf{R})_2 = \mathrm{R}_2/4 - \mathrm{R}_1/2$

$$4\delta = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_{-1} - 2\mathrm{R}_0, & \mathrm{R}_0, & 0, & \ldots & 0 \end{pmatrix}^{\top} \in \mathbb{R}^W$$

# Distributions à posteriori des paramètres inconnus

**Distribution jointe à posteriori :** par la règle de Bayes $\ln \pi(\mathbf{R}, \lambda_{\mathrm{R}} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0) =$

$$-\sum_{w=1}^{W} \frac{\left(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}} - \mathrm{Z}_w \ln(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}})\right)}{\gamma} - \lambda_{\mathrm{R}} \left(\|\mathrm{D}\mathbf{R} + \delta\|_1 + \beta_{\mathrm{R}}\right) + (W + \alpha_{\mathrm{R}} - 1) \ln \lambda_{\mathrm{R}}$$

où

- $\mathbf{R} = (\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_W)$ : nombres de reproduction hebdomadaires
- $\lambda_{\mathrm{R}}$ : hyperparamètre de la loi à priori sur $\mathbf{R}$
- $\mathbf{Z} = (\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_W)$ : comptes d'infections hebdomadaires
- $\mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0$ : nombres de reproduction initiaux
- $\gamma$ : paramètre d'échelle
- $\alpha_{\mathrm{R}}, \beta_{\mathrm{R}}$ : hyperparamètres

$\forall w \in \{2, \ldots, W\}$, $(\mathrm{D}\mathbf{R})_w := (\mathrm{R}_w - 2\mathrm{R}_{w-1} + \mathrm{R}_{w-2})/4$, au bord $(\mathrm{D}\mathbf{R})_1 = \mathrm{R}_1/4$, $(\mathrm{D}\mathbf{R})_2 = \mathrm{R}_2/4 - \mathrm{R}_1/2$

$$4\delta = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_{-1} - 2\mathrm{R}_0, & \mathrm{R}_0, & 0, & \ldots & 0 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^W$$

**Distribution à posteriori marginale de R :** par intégration par rapport à $\lambda_{\mathrm{R}}$

$$\pi(\mathbf{R}|\mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0) = \int_{\mathbb{R}_+^W} \pi(\mathbf{R}|\mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0, \lambda_{\mathrm{R}}) \pi_{\alpha_{\mathrm{R}}, \beta_{\mathrm{R}}}(\lambda_{\mathrm{R}}) \, \mathrm{d}\lambda_{\mathrm{R}}$$

**Distribution jointe à posteriori :** par la règle de Bayes $\ln \pi(\mathbf{R}, \lambda_R | \mathbf{Z}, R_{-1}, R_0) =$

$$-\sum_{w=1}^{W} \frac{\left(R_w \Phi_w^{\mathbf{Z}} - Z_w \ln(R_w \Phi_w^{\mathbf{Z}})\right)}{\gamma} - \lambda_R \left(\|D\mathbf{R} + \delta\|_1 + \beta_R\right) + (W + \alpha_R - 1) \ln \lambda_R$$

où

- $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_W)$ : nombres de reproduction hebdomadaires **inconnus**
- $\lambda_R$ : hyperparamètre de la loi à priori sur $\mathbf{R}$ **inconnus**
- $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_W)$ : comptes d'infections hebdomadaires
- $R_{-1}, R_0$ : nombres de reproduction initiaux
- $\gamma$ : paramètre d'échelle
- $\alpha_R, \beta_R$ : hyperparamètres

$\forall w \in \{2, \ldots, W\}$, $(D\mathbf{R})_w := (R_w - 2R_{w-1} + R_{w-2})/4$, au bord $(D\mathbf{R})_1 = R_1/4$, $(D\mathbf{R})_2 = R_2/4 - R_1/2$

$$4\delta = \begin{pmatrix} R_{-1} - 2R_0, & R_0, & 0, & \ldots & 0 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^W$$

**Distribution à posteriori marginale de R :** par intégration par rapport à $\lambda_R$

$$\pi(\mathbf{R} | \mathbf{Z}, R_{-1}, R_0) = \int_{\mathbb{R}_+^W} \pi(\mathbf{R} | \mathbf{Z}, R_{-1}, R_0, \lambda_R) \pi_{\alpha_R, \beta_R}(\lambda_R) \, d\lambda_R$$

# Distributions à posteriori des paramètres inconnus

**Distribution jointe à posteriori :** par la règle de Bayes $\ln \pi(\mathbf{R}, \lambda_{\mathrm{R}} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0) =$

$$-\sum_{w=1}^{W} \frac{\left(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}} - \mathrm{Z}_w \ln(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}})\right)}{\gamma} - \lambda_{\mathrm{R}} \left(\|\mathrm{D}\mathbf{R} + \delta\|_1 + \beta_{\mathrm{R}}\right) + \left(W + \alpha_{\mathrm{R}} - 1\right) \ln \lambda_{\mathrm{R}}$$

où

- $\mathbf{R} = (\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_W)$ : nombres de reproduction hebdomadaires **inconnus**
- $\lambda_{\mathrm{R}}$ : hyperparamètre de la loi à priori sur $\mathbf{R}$ **inconnus**
- $\mathbf{Z} = (\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_W)$ : comptes d'infections hebdomadaires **mesurés**
- $\mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0$ : nombres de reproduction initiaux
- $\gamma$ : paramètre d'échelle
- $\alpha_{\mathrm{R}}, \beta_{\mathrm{R}}$ : hyperparamètres

$\forall w \in \{2, \ldots, W\}, \ (\mathrm{D}\mathbf{R})_w := (\mathrm{R}_w - 2\mathrm{R}_{w-1} + \mathrm{R}_{w-2})/4$, au bord $(\mathrm{D}\mathbf{R})_1 = \mathrm{R}_1/4, \ (\mathrm{D}\mathbf{R})_2 = \mathrm{R}_2/4 - \mathrm{R}_1/2$

$$4\delta = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_{-1} - 2\mathrm{R}_0, & \mathrm{R}_0, & 0, & \ldots & 0 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^W$$

**Distribution à posteriori marginale de R :** par intégration par rapport à $\lambda_{\mathrm{R}}$

$$\pi(\mathbf{R} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0) = \int_{\mathbb{R}_+^W} \pi(\mathbf{R} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0, \lambda_{\mathrm{R}}) \pi_{\alpha_{\mathrm{R}}, \beta_{\mathrm{R}}}(\lambda_{\mathrm{R}}) \, \mathrm{d}\lambda_{\mathrm{R}}$$

## Distributions à posteriori des paramètres inconnus

**Distribution jointe à posteriori :** par la règle de Bayes $\ln \pi(\mathbf{R}, \lambda_{\mathrm{R}} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0) =$

$$-\sum_{w=1}^{W} \frac{\left(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}} - \mathrm{Z}_w \ln(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}})\right)}{\gamma} - \lambda_{\mathrm{R}} \left(\|\mathrm{D}\mathbf{R} + \delta\|_1 + \beta_{\mathrm{R}}\right) + \left(W + \alpha_{\mathrm{R}} - 1\right) \ln \lambda_{\mathrm{R}}$$

où

- $\mathbf{R} = (\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_W)$ : nombres de reproduction hebdomadaires **inconnus**
- $\lambda_{\mathrm{R}}$ : hyperparamètre de la loi à priori sur $\mathbf{R}$ **inconnus**
- $\mathbf{Z} = (\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_W)$ : comptes d'infections hebdomadaires **mesurés**
- $\mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0$ : nombres de reproduction initiaux $\mathrm{R}_w = \mathrm{Z}_w / \Phi_w^{\mathbf{Z}},\ w \in \{-1, 0\}$
- $\gamma$ : paramètre d'échelle $\gamma = 0{,}025 \times \mathrm{std}(\mathbf{Z})$
- $\alpha_{\mathrm{R}}, \beta_{\mathrm{R}}$ : hyperparamètres fixés pour être non informatifs

$\forall w \in \{2, \ldots, W\},\ (\mathrm{D}\mathbf{R})_w := (\mathrm{R}_w - 2\mathrm{R}_{w-1} + \mathrm{R}_{w-2})/4,$ au bord $(\mathrm{D}\mathbf{R})_1 = \mathrm{R}_1/4,\ (\mathrm{D}\mathbf{R})_2 = \mathrm{R}_2/4 - \mathrm{R}_1/2$

$$4\delta = \begin{pmatrix} \mathrm{R}_{-1} - 2\mathrm{R}_0, & \mathrm{R}_0, & 0, & \ldots & 0 \end{pmatrix}^{\top} \in \mathbb{R}^W$$

**Distribution à posteriori marginale de R :** par intégration par rapport à $\lambda_{\mathrm{R}}$

$$\pi(\mathbf{R} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0) = \int_{\mathbb{R}_+^W} \pi(\mathbf{R} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0, \lambda_{\mathrm{R}}) \pi_{\alpha_{\mathrm{R}}, \beta_{\mathrm{R}}}(\lambda_{\mathrm{R}})\, \mathrm{d}\lambda_{\mathrm{R}}$$

**Objectif :** estimation de $R_w$ **précise**, **robuste** avec **niveau de confiance** fiable

**Objectif :** estimation de $\mathrm{R}_w$ **précise**, **robuste** avec **niveau de confiance** fiable

**Estimateurs bayésiens hiérarchiques** du nombre de reproduction $\mathbf{R} = (\mathrm{R}_1, \dots, \mathrm{R}_W)$

- moyenne à posteriori : $\widehat{\mathbf{R}}^{\mathrm{Hebdo-Bayes}}$

  sous lois jointe $\pi(\mathbf{R}, \lambda_{\mathrm{R}} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0)$ et marginale $\pi(\mathbf{R} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0)$

- intervalles de crédibilité à 95% : $\widehat{\mathrm{IC}}_w^{\mathrm{Hebdo-Bayes}}$

  sous loi marginale $\pi(\mathrm{R}_w | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0)$

**Objectif :** estimation de $R_w$ **précise**, **robuste** avec **niveau de confiance** fiable

**Estimateurs bayésiens hiérarchiques** du nombre de reproduction $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_W)$

- moyenne à posteriori : $\widehat{\mathbf{R}}^{\text{Hebdo}-\text{Bayes}}$

  sous lois jointe $\pi(\mathbf{R}, \lambda_R | \mathbf{Z}, R_{-1}, R_0)$ et marginale $\pi(\mathbf{R} | \mathbf{Z}, R_{-1}, R_0)$

- intervalles de crédibilité à 95% : $\widehat{\mathrm{IC}}_w^{\text{Hebdo}-\text{Bayes}}$

  sous loi marginale $\pi(R_w | \mathbf{Z}, R_{-1}, R_0)$

Ni loi jointe ni loi marginale connues sous forme **explicite** :

$\Longrightarrow$ algorithme de **Monte Carlo par chaîne de Markov**

suite $(\mathbf{R}^{(k)}, \lambda_R^{(k)};\ k \in \mathbb{N})$ **converge** en loi vers $\pi(\mathbf{R}, \lambda_R | \mathbf{Z}, R_{-1}, R_0)$

puis moyennes, quantiles **empiriques** calculés sur $(\mathbf{R}^{(k)}, \lambda_R^{(k)};\ k \geq k_{\text{chauffe}})$

## Échantillonneur de Gibbs de la loi jointe à posteriori

**Distribution jointe à posteriori** $\ln \pi(\mathbf{R}, \lambda_{\mathrm{R}} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0)$

$$= -\sum_{w=1}^{W} \frac{\left(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}} - \mathrm{Z}_w \ln(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}})\right)}{\gamma} - \lambda_{\mathrm{R}} \left( \|\mathrm{D}\mathbf{R} + \delta\|_1 + \beta_{\mathrm{R}} \right) + (W + \alpha_{\mathrm{R}} - 1) \ln \lambda_{\mathrm{R}}$$

**non différentiable** par rapport à **R** et **opérateur linéaire** D composé à la norme $\ell_1$

# Échantillonneur de Gibbs de la loi jointe à posteriori

**Distribution jointe à posteriori** $\ln \pi(\mathbf{R}, \lambda_{\mathrm{R}} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0)$

$$= - \sum_{w=1}^{W} \frac{\left(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}} - \mathrm{Z}_w \ln(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}})\right)}{\gamma} - \lambda_{\mathrm{R}} \left(\|\mathrm{D}\mathbf{R} + \delta\|_1 + \beta_{\mathrm{R}}\right) + (W + \alpha_{\mathrm{R}} - 1) \ln \lambda_{\mathrm{R}}$$

**non différentiable** par rapport à **R** et **opérateur linéaire** D composé à la norme $\ell_1$

**Gibbs avec Langevin proximal** (Fort et coll. 2023, *IEEE Trans. Signal Process.*)

- échantillonnage de **R** : proposition de type **gradient proximal préconditionné**

  (Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Signal Process.* ; Artigas et coll. 2022, *EUSIPCO'22*)

- échantillonnage de $\lambda_{\mathrm{R}}$ : **exact** car loi conjuguée

# Échantillonneur de Gibbs de la loi jointe à posteriori

**Distribution jointe à posteriori** $\ln \pi(\mathbf{R}, \lambda_{\mathrm{R}} | \mathbf{Z}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0)$

$$= -\sum_{w=1}^{W} \frac{\left(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}} - \mathrm{Z}_w \ln(\mathrm{R}_w \Phi_w^{\mathbf{Z}})\right)}{\gamma} - \lambda_{\mathrm{R}} \left(\|\mathrm{D}\mathbf{R} + \delta\|_1 + \beta_{\mathrm{R}}\right) + (W + \alpha_{\mathrm{R}} - 1) \ln \lambda_{\mathrm{R}}$$

**non différentiable** par rapport à **R** et **opérateur linéaire** D composé à la norme $\ell_1$

**Gibbs avec Langevin proximal** (Fort et coll. 2023, *IEEE Trans. Signal Process.*)

- échantillonnage de **R** : proposition de type **gradient proximal préconditionné**

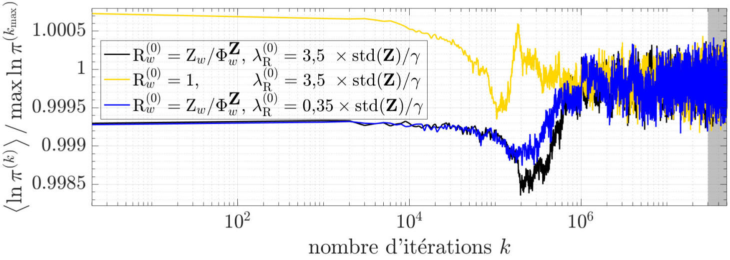
  (Pascal et coll. 2022, *IEEE Trans. Signal Process.* ; Artigas et coll. 2022, *EUSIPCO'22*)

- échantillonnage de $\lambda_{\mathrm{R}}$ : **exact** car loi conjuguée

---

**Entrées :** $\mathbf{Z}$, $\Phi^{\mathbf{Z}}$, $\mathrm{R}_{-1}$, $\mathrm{R}_0$, $\alpha_{\mathrm{R}}$, $\beta_{\mathrm{R}}$, $\varepsilon$ ; initialisation : $\mathbf{R}^{(0)} \in \mathbb{R}^W_{>0}$, $\lambda_{\mathrm{R}}^{(0)} \in \mathbb{R}_{>0}$
**Résultat :** $\widehat{\mathbf{R}}^{\text{Hebdo-Bayes}}$, $\widehat{\mathbf{IC}}^{\text{Hebdo-Bayes}}$
**pour** $k = 0 \ldots k_{\max}$ **faire**
  $\mathbf{R}^{(k+1)} \sim \mathtt{PGdual}(\mathbf{R}^{(k)} | \lambda_{\mathrm{R}}^{(k)}; \mathbf{Z}, \Phi^{\mathbf{Z}}, \mathrm{R}_{-1}, \mathrm{R}_0)$ ; *échantillonnage de* $\mathbf{R}$ *à* $\lambda_{\mathrm{R}}$ *fixé*
  $\lambda_{\mathrm{R}}^{(k+1)} \sim \Gamma(W + \alpha_{\mathrm{R}}, \|\mathrm{D}\mathbf{R}^{(k+1)} + \delta\|_1 + \beta_{\mathrm{R}})$ ; *échantillonnage de* $\lambda_{\mathrm{R}}$ *à* $\mathbf{R}$ *fixé*
**fin**
$\widehat{\mathbf{R}} \leftarrow \text{Moyenne}\{\mathbf{R}^{(k)}, k \geq k_{\text{chauffe}}\}$ ; $\widehat{\mathbf{IC}} \leftarrow \text{Quantiles}_{\varepsilon, 1-\varepsilon}\{\mathbf{R}^{(k)}, k \geq k_{\text{chauffe}}\}$ ;

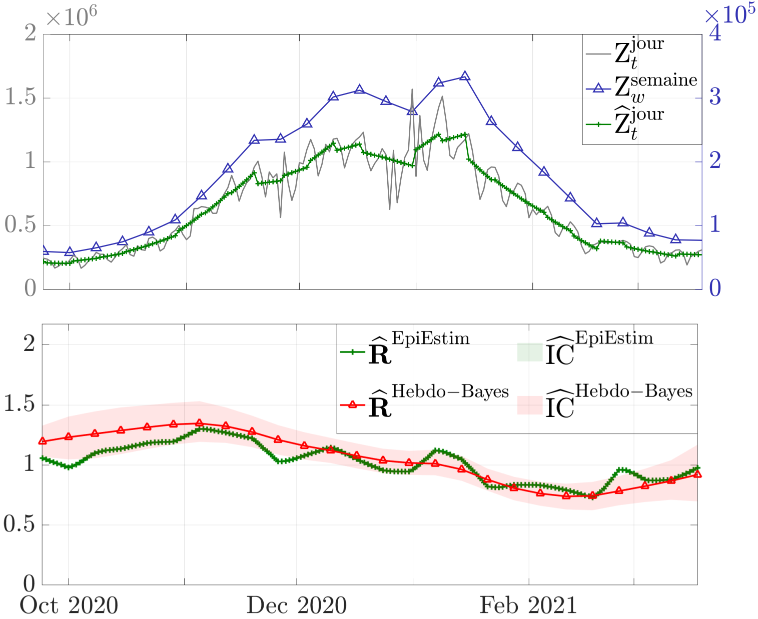
$\langle\cdot\rangle$ : moyenne sur **dix** chaînes indépendantes de $5 \cdot 10^7$ itérations dont chauffe de $3 \cdot 10^7$

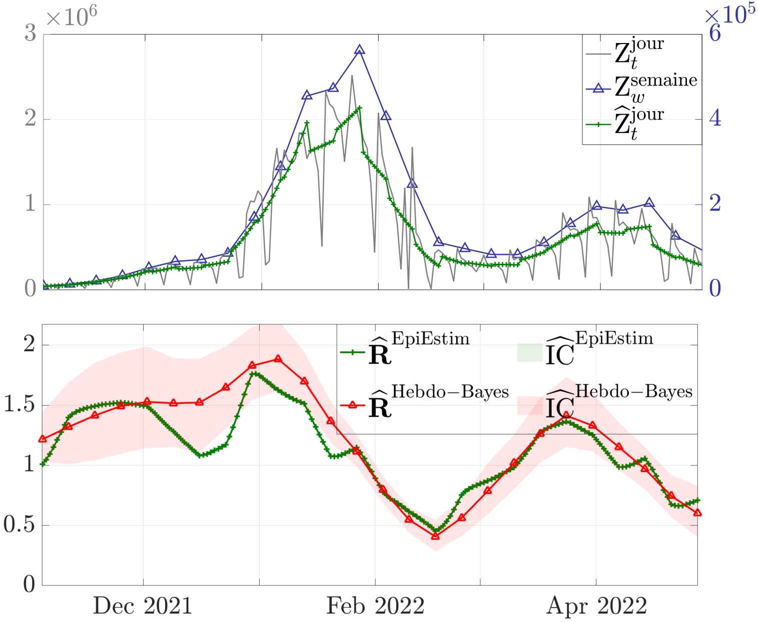



Pour les **trois** initialisations de la chaîne de Markov :

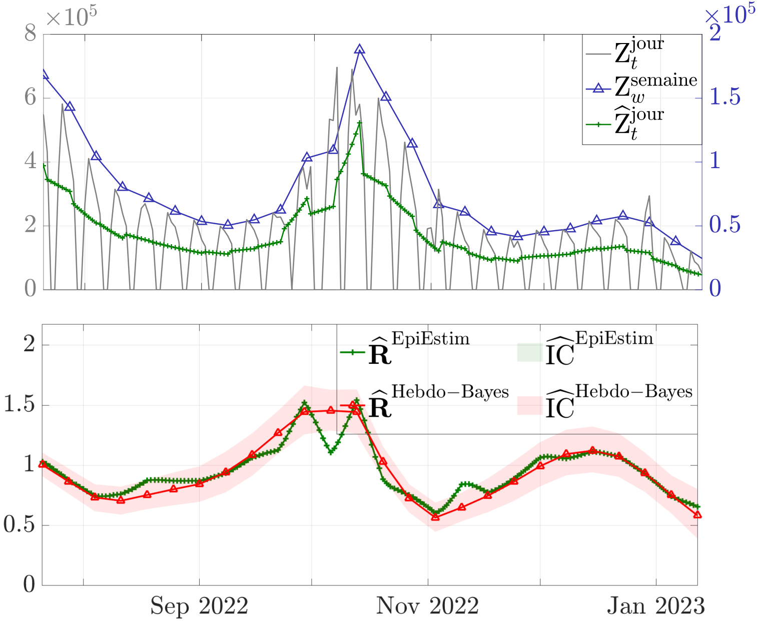
- la valeur de la log-distribution se **stabilise** ;
- de même que l'amplitude de ses **fluctuations** ;
- **indépendamment** de l'initialisation.

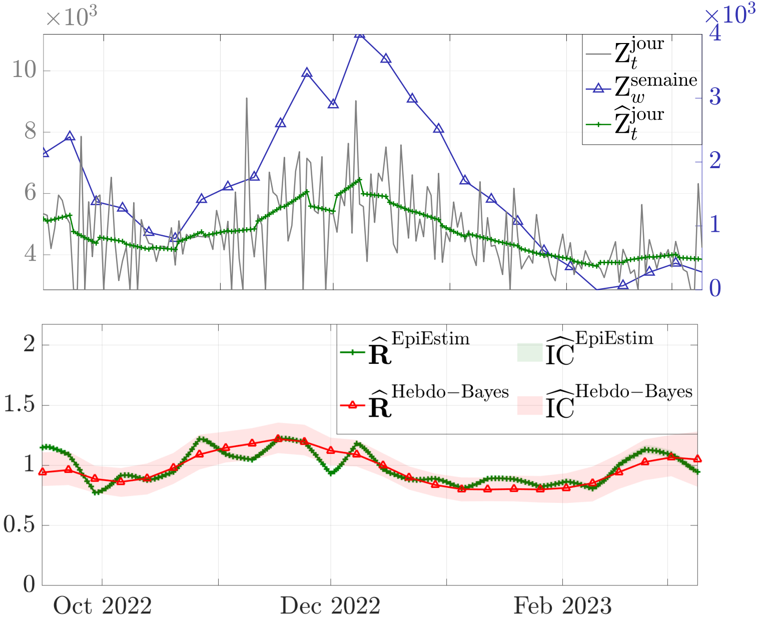
# Suivi de la COVID-19 aux États-Unis : données agrégées



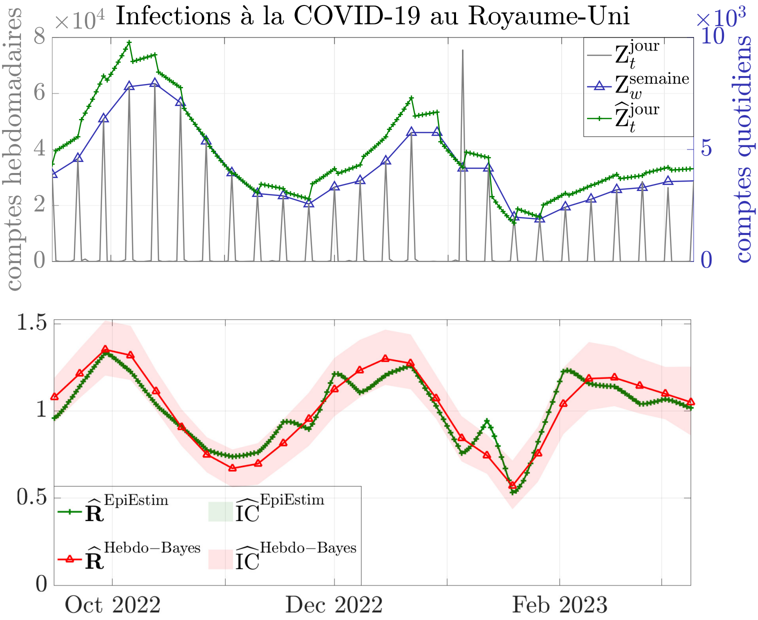

$\times 10^6$
3
2
1
0
$\times 10^5$
6
4
2
0
$Z_t^{\text{jour}}$
$Z_w^{\text{semaine}}$
$\widehat{Z}_t^{\text{jour}}$
2
1.5
1
0.5
0
$\widehat{\mathbf{R}}^{\text{EpiEstim}}$
$\widehat{\text{IC}}^{\text{EpiEstim}}$
$\widehat{\mathbf{R}}^{\text{Hebdo-Bayes}}$
$\widehat{\text{IC}}^{\text{Hebdo-Bayes}}$
Dec 2021
Feb 2022
Apr 2022

# Suivi de la COVID-19 en Allemagne : données agrégées




$\times 10^3$
10
8
6
4
$\times 10^3$
4
3
2
1
0
$Z_t^{\text{jour}}$
$Z_w^{\text{semaine}}$
$\widehat{Z}_t^{\text{jour}}$
2
1.5
1
0.5
0
$\widehat{\mathbf{R}}^{\text{EpiEstim}}$
$\widehat{\text{IC}}^{\text{EpiEstim}}$
$\widehat{\mathbf{R}}^{\text{Hebdo-Bayes}}$
$\widehat{\text{IC}}^{\text{Hebdo-Bayes}}$
Oct 2022
Dec 2022
Feb 2023

# Suivi de la COVID-19 au Royaume-Uni : report hebdomadaire



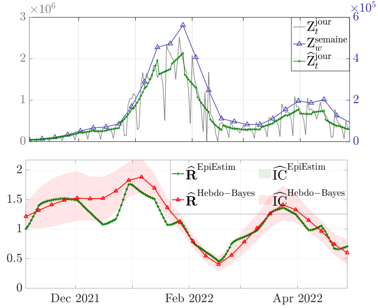
# Discussion et conclusion

**Performances comparées de l'estimateur** Hebdo – Bayes

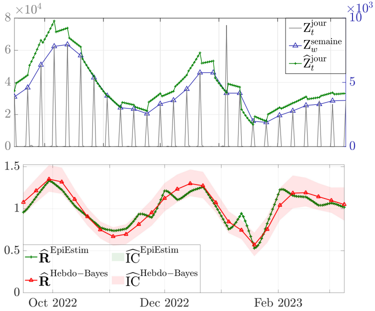
- **en accord** global avec EpiEstim sur la valeur du nombre de reproduction
- Hebdo – Bayes comportement plus **régulier** en temps et sans artefacts
- estimée plus lisible et détection passage au-dessus de un plus **précise**
- intervalle de crédibilité Hebdo – Bayes de taille plus **réaliste** et variable

$\Longrightarrow$ mesure **précisément** **R** et estimation incertitude **fiable** à la fois sur

données agrégées




comptes hebdomadaires



**Contributions principales :**

- modèle bayésien **hiérarchique** de la propagation d'une épidémie virale
- adapté à un report de cas et donc un nombre de reproduction **hebdomadaires**
- reflétant les fluctuations intrinsèques des comptes *via* un **paramètre d'échelle**
- échantillonné par Monte Carlo par chaîne de Markov : schéma de Gibbs **efficace**

$\Longrightarrow$ application **données réelles** différents pays/phases de la pandémie de COVID-19

**Contributions principales :**

- modèle bayésien **hiérarchique** de la propagation d'une épidémie virale
- adapté à un report de cas et donc un nombre de reproduction **hebdomadaires**
- reflétant les fluctuations intrinsèques des comptes *via* un **paramètre d'échelle**
- échantillonné par Monte Carlo par chaîne de Markov : schéma de Gibbs **efficace**

$\Longrightarrow$ application **données réelles** différents pays/phases de la pandémie de COVID-19

**Travaux en cours et perspectives :**

- modèle remis à l'échelle **quotidien** avec prise en compte des erreurs de report
- échantillonnage joint ou estimation des **paramètres** du modèle

  paramètre d'échelle $\gamma$, moyenne et écart-type de la fonction d'intervalle de série $\phi$

## Discussion et conclusion

**Contributions principales :**

- modèle bayésien **hiérarchique** de la propagation d'une épidémie virale
- adapté à un report de cas et donc un nombre de reproduction **hebdomadaires**
- reflétant les fluctuations intrinsèques des comptes *via* un **paramètre d'échelle**
- échantillonné par Monte Carlo par chaîne de Markov : schéma de Gibbs **efficace**

$\Longrightarrow$ application **données réelles** différents pays/phases de la pandémie de COVID-19

**Travaux en cours et perspectives :**

- modèle remis à l'échelle **quotidien** avec prise en compte des erreurs de report
- échantillonnage joint ou estimation des **paramètres** du modèle

paramètre d'échelle $\gamma$, moyenne et écart-type de la fonction d'intervalle de série $\phi$

hal.science/hal-05013785