Stationnarité d'un processus aléatoire

Barbara Pascal

21 mars 2020

Notations : On se donne $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un processus aléatoire défini sur l'axe réel, indicé par le temps noté t.

1 Stationnarité au sens strict

1.1 À tout ordre

Définition 1 (Stationnarité au sens strict)**.** On dit que le processus $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est stationnaire (au sens strict) si, quel que soit le nombre d'instants considérés $n \in \mathbb{N}$, quels que soient ces instants $t_1, \ldots, t_n$ et quel que soit le délai τ la loi de probabilité du vecteur aléatoire $(X_{t_1+\tau}, \ldots, X_{t_n+\tau})$ est la même que celle du vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

On remarque alors, en prenant $n = 1$, que pour un processus stationnaire la loi de X_t est la même que la loi de $X_{t+\tau}$, en particulier en prenant $\tau = -t$, les espérances sont égales $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$. Ainsi la moyenne du processus est indépendante de t. Le même raisonnement montre qu'il en est de même pour sa variance, et tous ses moments lorsqu'ils sont bien définis.

En prenant $n = 2$, on remarque que la loi de (X_{t_1}, X_{t_2}) est la même que la loi de $(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau})$. Ainsi, en prenant $\tau = -t_1$ on obtient

$$\mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2}] = \mathbb{E}[X_0 X_{t_2-t_1}]$$

qui ne dépend que de $t_2 - t_1$.

Et ainsi de suite aux ordres supérieurs.

1.2 À l'ordre N

Définition 2 (Stationnarité au sens strict à l'ordre N)**.** On dit que le processus $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est stationnaire (au sens strict) à l'ordre N si, quels que soient les N instants $t_1, \ldots, t_N$ et quel que soit le délai τ la loi de probabilité du vecteur aléatoire $(X_{t_1+\tau}, \ldots, X_{t_N+\tau})$ est la même que celle du vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_N})$.

La stationnarité à l'ordre N implique la stationnarité à tous les ordres inférieurs à N.

2 Stationnarité au sens large

En pratique, la définition de la stationnarité au sens stricte est très difficile à manipuler puisqu'elle stipule une égalité des lois de probabilités qui sont des objets théoriques, utilisés pour la modélisation d'un phénomène. Au contraire, les outils pratiques que l'on peut essayer d'estimer à partir d'échantillons sont les moments. Pour cette raison, en traitement du signal, on définit la stationnarité au sens large qui va faire intervenir uniquement les moments d'ordre un et deux.

Définition 3 (Stationnarité au sens large)**.** Un processus aléatoire $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est dit stationnaire au sens large
- À l'ordre un : si sa moyenne $m_X(t) \triangleq \mathbb{E}[X_t]$ est indépendante de t.
- À l'ordre deux : s'il est stationnaire au sens large à l'ordre un que sa covariance ne dépend que de τ, c'est à dire si $\mathrm{cov}(t, t+\tau) \triangleq \mathbb{E}\left[(X_t - \mathrm{m}_X(t))\,(X_{t+\tau} - \mathrm{m}_X(t+\tau))\right]$ est indépendant de t.

Remarque. La condition de stationnarité au sens large à l'ordre deux peut s'exprimer de manière équivalente sur la fonction d'autocorrélation $\mathrm{R}(t, t+\tau) \triangleq \mathbb{E}\left[X_t X_{t+\tau}\right]$ qui ne doit dépendre que de τ.

Proposition 1. *Tout processus stationnaire au sens strict à l'ordre $N \geq 2$, et qui possède des moments d'ordre un et deux, est stationnaire au sens faible.*

3 Processus gaussiens et stationnarité

Commençons par énoncer un théorème utile.

Théorème (Théorème d'Isserlis)**.** *Si $(X_1, \ldots, X_N)$ est un vecteur Gaussien de moyenne nulle, alors ses moments d'ordres impairs sont nuls et ses moments d'ordres pairs peuvent s'exprimer uniquement en fonction de moments d'ordre 2, c'est-à-dire*

$$\mathbb{E}\left[X_1 X_2 \cdots X_{2M+1}\right] = 0 \tag{1}$$

$$\mathbb{E}\left[X_1 X_2 \cdots X_{2M}\right] = \sum_{\mathrm{Paires} \in \mathcal{P}_N} \prod_{\{i,j\} \in \mathrm{Paires}} \mathbb{E}\left[X_i X_j\right] \tag{2}$$

où la somme porte sur toutes les façons de former des paires disjointes de $\{1, \ldots, N\}$ et le produit sur toutes ces paires.

Exemple. Voyons directement l'exemple pour $N = 4$:

$$\mathbb{E}\left[X_1 X_2 X_3 X_4\right] = \mathbb{E}\left[X_1 X_2\right] \mathbb{E}\left[X_3 X_4\right] + \mathbb{E}\left[X_1 X_3\right] \mathbb{E}\left[X_2 X_4\right] + \mathbb{E}\left[X_1 X_4\right] \mathbb{E}\left[X_2 X_3\right]. \tag{3}$$

Pour un processus Gaussien, s'il est stationnaire au sens faible à l'ordre 2, alors

$$\mathbb{E}\left[X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3} X_{t_4}\right] \tag{4}$$

$$= \mathbb{E}\left[X_{t_1} X_{t_2}\right] \mathbb{E}\left[X_{t_3} X_{t_4}\right] + \mathbb{E}\left[X_{t_1} X_{t_3}\right] \mathbb{E}\left[X_{t_2} X_{t_4}\right] + \mathbb{E}\left[X_{t_1} X_{t_4}\right] \mathbb{E}\left[X_{t_2} X_{t_3}\right] \tag{5}$$

$$\underset{\mathrm{Stationnaire}}{=} \mathbb{E}\left[X_{t_1+\tau} X_{t_2+\tau}\right] \mathbb{E}\left[X_{t_3+\tau} X_{t_4+\tau}\right] + \mathbb{E}\left[X_{t_1+\tau} X_{t_3+\tau}\right] \mathbb{E}\left[X_{t_2+\tau} X_{t_4+\tau}\right] + \mathbb{E}\left[X_{t_1+\tau} X_{t_4+\tau}\right] \mathbb{E}\left[X_{t_2+\tau} X_{t_3+\tau}\right] \tag{6}$$

$$= \mathbb{E}\left[X_{t_1+\tau} X_{t_2+\tau} X_{t_3+\tau} X_{t_4+\tau}\right], \tag{7}$$

ce qui signifie que tous le moment d'ordre 4 est stationnaire. On montrerait de même que tous les moments d'un processus Gaussien sont stationnaires.

Or, un processus Gaussien est complètement défini par ses moments d'ordre un et deux, si ceux-ci sont stationnaires alors sa distribution de probabilité est elle-même stationnaire.

Proposition 2. *Pour un processus **Gaussien**, la stationnarité au sens large à l'ordre deux implique la stationnarité au sens strict à tous les ordres.*

Remarque. Comme souvent on voit que la distribution Gaussienne possède des propriétés très fortes et très pratiques. C'est ce qui fait son succès ! On peut l'étudier de manière très détaillée. C'est pour cela que, face à un phénomène nouveau, le premier modèle considéré est très souvent le processus Gaussien.