Travaux Dirigés de Physique Statistique

1 Loi binomiale

On considère une enceinte de volume V contenant N particules sans interactions mutuelles. Ces particules sont microscopiquement discernables et on s'intéresse à n le nombre de particules contenues dans une partie de l'enceinte de volume v. Le système est supposé à l'équilibre, ce qui se traduit par le fait que la probabilité, pour une particule donnée, d'être dans le volume v est $p \equiv v/V$.

1. Quelle est la probabilité d'avoir n particules d'« identité » donnée dans le volume v ?
2. On s'intéresse maintenant aux « *macro-états* » qui sont uniquement définis par la seule donnée du nombre n de particules présentes dans le volume v. Quelle est la probabilité $f(n)$ du macro-état caractérisé par n ?
3. Calculer la valeur moyenne $\bar{n}$ et l'écart-type Δn relatif à n. Pour ces calculs, on pourra éventuellement partir de l'expression de la fonction génératrice
$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} f(n) x^n.$$
4. Donner l'allure de $f(n)$ lorsque $N \to \infty$. En supposant $N \gg 1$, $n \gg 1$ et $N \gg n$ et en les assimilant à des variables continues, montrer que la moyenne $\bar{n}$ précédemment trouvée coïncide avec la valeur la plus probable et qu'au voisinage de cette valeur, $f(n)$ peut s'écrire sous une forme gaussienne :
$$f(n) = f(\bar{n}) \exp\left(-\frac{(n-\bar{n})^2}{2(\Delta n)^2}\right).$$
Quelle est la signification de Δn ?
5. Montrer que lorsque $v/V \to 0$ (avec $V \to \infty$ et à densité N/V constante), $f(n)$ prend la forme d'une distribution de Poisson :
$$f(n) \simeq \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}.$$

2 Élasticité du caoutchouc

On modélise une chaîne de polymères par une chaîne unidimensionnelle constituée de n segments articulés de longueur a. les orientations $\rightarrow$ et $\leftarrow$ de ces segments sont équivalentes du point de vue énergétique. La distance séparant les deux extrémités de la chaîne est notée L. Enfin cette chaîne est maintenue à longueur L et énergie fixées. La géométrie du problème est présentée en Figure 1.

1. Soit une configuration avec n_+ segments d'orientation $\rightarrow$ et n_- segments d'orientation $\leftarrow$. Écrire les deux équations satisfaites par n_+ et n_-.
2. Déterminer l'entropie $S(L, n)$ de la chaîne.
3. On définit la *tension* de la chaîne par :
$$\frac{F}{T} \equiv -\frac{\partial S}{\partial L}.$$
Montrer que la tension de la chaîne vaut :
$$F = \frac{T k_{\mathrm{B}}}{2a} \ln\left(\frac{1 + L/(na)}{1 - L/(na)}\right).$$

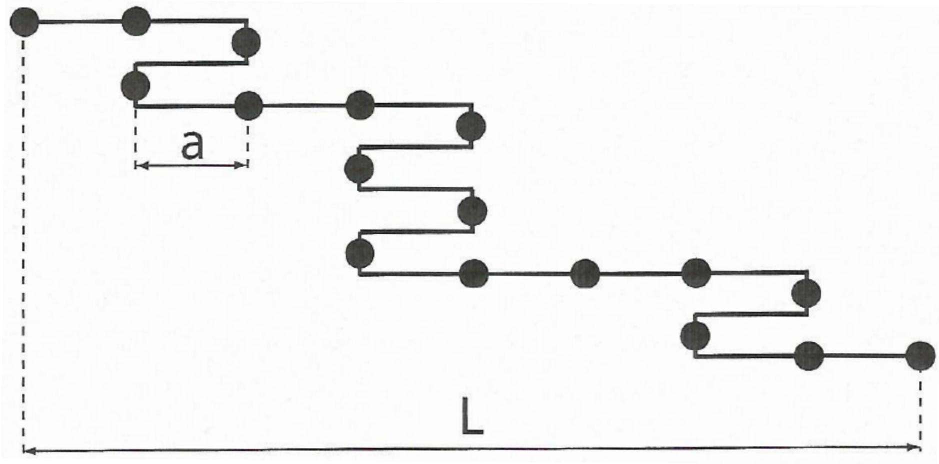

Figure 1 – Modèle de chaîne de polymères.

4. Que donne cette expression dans la limite $L \ll na$? Montrer que, dans cette limite, on a :

$$\frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F = -\frac{1}{T}.$$

Commenter ce résultat. Pourquoi peut-on parler de « ressort entropique » ?

3 Modèle de spins paramagnétique

On considère le modèle de spins paramagnétiques par l'Hamiltonien :

$$H(\{s_i\}) = -h\sum_{i=1}^{N} s_i, \qquad s_i = \pm 1,$$

où h est le champ magnétique.

Remarque : Comme les spins sont sans interaction, le modèle peut être défini en dimension arbitraire.
Calculer la fonction de partition :

$$Z = \sum_{\{s_i=\pm 1\}} e^{-\beta H(\{s_i\})}.$$

En déduire l'énergie libre F, l'aimantation moyenne $M = \langle \sum_{i=1}^{N} s_i \rangle$ et les fluctuations de l'aimantation dans l'ensemble canonique.