Théorème de Cochran et estimateur non-biaisé de la variance

Barbara Pascal

8 mars 2020

Théorème (Cochran)**.** *Soit $X \in \mathbb{R}^n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$ un vecteur Gaussien i.i.d. de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^n$ et de variance σ^2. On suppose que l'espace $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme la somme directe*

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_K,$$

avec les projecteurs orthogonaux associés $P_1, \ldots, P_K$, où, pour $k \in \{1, \ldots, K\}$, le projecteur P_k est de rang $\mathrm{rg}(P_k) = \dim(E_k) = r_k$. Alors, en définissant, pour tout $k \in \{1, \ldots, K\}$, $Y_k = P_k X$

(i) Les vecteurs aléatoires Y_k sont Gaussiens et deux à deux indépendants.

(ii) Les variables aléatoires réelles

$$z_k = \frac{\|P_k (X - \mu)\|^2}{\sigma^2} = \mathcal{Q}_k(X)$$

où $\mathcal{Q}_k$ est une forme quadratique de rang r_k, suivent une loi $\chi^2_{r_k}$ et sont deux à deux indépendantes.

Application (Variance de l'estimateur non biaisé)**.** On considère l'estimateur non-biaisé de la variance construit à partir des observations Gaussienne i.i.d. $\{x_i = x(t+i),\, i = 1, \ldots, n\}$ d'un signal stationnaire $x(t)$ de moyenne μ et de variance σ^2

$$\widehat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \widehat{m})^2, \quad \text{avec} \quad \widehat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

On pose $X = (x_i)_{i=1}^n$ et on remarque que

$$\mathcal{Q}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

est une forme quadratique de rang plein, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(\mathcal{Q}) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$.
Puis, en développant l'expression

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \widehat{m} + \widehat{m} - \mu)^2}{\sigma^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \widehat{m})^2}{\sigma^2} + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \widehat{m})(\widehat{m} - \mu)}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\widehat{m} - \mu)^2}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Or par définition de $\widehat{m}$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \widehat{m}) = 0,$$

donc

$$\underset{\text{de rang } n}{\underline{\mathcal{Q}(X)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \widehat{m})^2}{\sigma^2} + n \frac{(\widehat{m} - \mu)^2}{\sigma^2} = \mathcal{Q}_1(X) + \underset{\text{de rang } 1}{\underline{\mathcal{Q}_2(X)}},$$

et $\mathcal{Q}_1$ est de rang $n-1$, cf. remarque ci-dessous.

Remarque (Rangs de $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$). La forme quadratique $\mathcal{Q}_2$ s'écrit en fonction des observations $(x_i)_{i=1}^n$:

$$\mathcal{Q}_2(X) = \frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - \mu\right)^2 = \frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)\right)^2,$$

par définition de $\widehat{m}$.
Posons $X' \triangleq (x_i')_{i=1}^n$ avec $x_i' \triangleq x_i - \mu$ le vecteur des observations recentrées. On a alors

$$\mathcal{Q}_2(X) = \mathcal{Q}_2'(X')$$

et $\mathrm{rg}(\mathcal{Q}_2) = \mathrm{rg}(\mathcal{Q}_2')$. Or

$$\mathcal{Q}_2'(X') = \frac{n}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i'}{n}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{1}^\top X'\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} X'^\top \underbrace{\mathbf{1}\mathbf{1}^\top}_{\triangleq P_2(X')} X'$$

où $\mathbf{1}$ désigne le vecteur colonne (unitaire) de taille n dont tous les coefficients valent $1/\sqrt{n}$, la transposée est notée $^\top$, et $\mathbf{1}^\top X$ correspond au produit scalaire de $\mathbf{1}$ et X'. Cela nous permet d'identifier la matrice associée à la forme quadratique $\mathcal{Q}_2'$, qui est, au facteur $1/\sigma^2$ près, la matrice de projection orhtogonale sur le vecteur $\mathbf{1}$, que nous noterons P_2. On a donc bien

$$\mathcal{Q}_2(X) = \mathcal{Q}_2'(X') = \frac{1}{\sigma^2} X'^\top P_2 X' = \frac{1}{\sigma^2} X'^\top P_2^\top P_2 X' = \frac{\|P_2(X-\mu)\|^2}{\sigma^2},$$

en utilisant $P_2^\top = P_2$ et $P_2^2 = P_2$ pour une projection orthogonale. On peut ensuite vérifier que

$$\mathcal{Q}_1(X) = \frac{\|P_1(X-\mu)\|^2}{\sigma^2},$$

avec P_1 la projection sur $\mathbf{1}^\perp$ (l'espace de dimension $n-1$ orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$) dont la matrice est $I_n - \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$, avec I_n la matrice identité de taille n. En effet

$$\begin{aligned} X'^\top\left(I_n - \mathbf{1}\mathbf{1}^\top\right) X' &= X'^\top X' - X'^\top \mathbf{1}\mathbf{1}^\top X = X'^\top X' - \sigma^2 \mathcal{Q}_2'(X') \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 - n(\widehat{m}-\mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(x_i-\mu)^2 - (\widehat{m}-\mu)^2\right] \\ &= \sum_{i=1} (x_i - \widehat{m})^2 \\ &= \sigma^2 \mathcal{Q}_1(X). \end{aligned}$$

L'application du théorème de Cochran nous assure alors que
— $\mathcal{Q}_1(X)$ suit une loi χ^2_{n-1} à $n-1$ degrés de liberté.
— $\mathcal{Q}_1(X)$ et $\mathcal{Q}_2(X)$ sont des variables aléatoires indépendantes.
Or

$$\mathcal{Q}_1(X) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\widehat{m})^2}{\sigma^2} = (n-1)\frac{\widehat{\sigma}_u^2}{\sigma^2}$$

donc en utilisant le fait que la variance d'une loi χ^2_{n-1} vaut $2(n-1)$ on obtient

$$\mathbb{V}\left[(n-1)\frac{\widehat{\sigma}_u^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1) \iff \mathbb{V}\left[\widehat{\sigma}_u^2\right] = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$